Programme de colles n°20

semaine du 11 au 15 mars

Notions vues en cours

Révision des semaines précédentes : chapitres 20 et 21 (Polynômes parties A et B).
Chapitre 21 : Polynômes (Partie B)

- Polynôme scindé (par convention, les polynômes constants non nuls le sont), polynôme scindé à racines simples, relations coefficients-racines
- Un polynôme non nul de $\mathbb{K}_n[X]$ admet au plus n racines comptées avec multiplicité : il est scindé s'il en admet exactement n, et scindé à racines simples si en plus la multiplicité de chaque racine est 1

Chapitre 22 : Polynômes (Partie C) et fractions rationnelles

- Polynôme irréductible sur $\mathbb{K}$, si $\deg P \geq 2$ et P admet une racine dans $\mathbb{K}$ alors P n'est pas irréductible sur $\mathbb{K}$
- Théorème de d'Alembert-Gauss, tout polynôme non nul est scindé sur $\mathbb{C}$, $A \wedge B = 1$ ssi A et B n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$
- Description des polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$, décomposition en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$
- Décomposition généralisée (les valuations de chaque polynôme irréductible peuvent valoir 0), obtention du PGCD et du PPCM de deux polynômes à partir des valuations
- Polynôme d'interpolation de Lagrange associés à des points d'abscisses distinctes
- Fraction rationnelle, ensemble $\mathbb{K}(X)$, c'est un corps pour $+$ et $\times$
- Une même fraction admet plusieurs écritures, fraction irréductible, on peut s'y ramener en divisant par le PGCD, degré d'une fraction : c'est un élément de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$
- Racine et pôle d'une fraction (avec la notion de multiplicité), *fonction* rationnelle, compatibilité avec les opérations $+, \lambda\cdot, \times$
- Décomposition en éléments simples : partie entière, forme générale sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$, aperçu de "recettes de cuisine" pour trouver les coefficients

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode), parmi les chapitres **20 à 22**. *Des exemples de questions figurent en page suivante.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Énoncé uniquement : polynômes irréductibles et forme de la décomposition d'un polynôme irréductible sur $\mathbb{R}[X]$ en rappelant bien toutes les hypothèses sur chaque variable introduite. On présentera (éventuellement oralement) le résultat équivalent dans $\mathbb{C}[X]$ Chapitre 22, Corollaire 22.5 et Théorème 22.7
2. Construction d'un polynôme d'interpolation de Lagrange associé à quelques points (qui seront donnés par l'examinateur) Chapitre 22, Section 2
3. Décomposition en éléments simples d'une fraction "gentille" (mais dont le dénominateur n'est pas scindé à racines simples) Chapitre 22, Section 5.4

Exemples de questions libres :

Chapitre 20 :

- Comment est défini le degré d'un polynôme P ?
- Exprimer les coefficients du polynôme PQ en fonction de ceux de P et Q.
- Donner les formules du degré de $P+Q$, et de PQ.
- Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Que peut-on dire de l'application $P \mapsto P(\alpha)$?
- Exprimer les coefficients du polynôme P' en fonction de ceux de P.

Chapitre 21 :

- Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Si $A \mid B$ et $B \mid A$, que peut-on dire ?
- Soit $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$. Si $AB \mid AC$, peut-on en déduire que $B \mid C$?
- Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Quelles sont les trois conditions que doit vérifier un polynôme D pour être le PGCD de A et de B ?
- Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Quel est le lien entre AB et $(A \wedge B)(A \vee B)$?
- Si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(10)}(\alpha) = 0$, que peut-on dire sur la multiplicité de α ? Est-ce qu'il y a d'autres caractérisations équivalentes de cela ?

Chapitre 22 :

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P admet une racine complexe non réelle α. Donner une autre racine de P. Que peut-on dire de plus ?
- Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?
- Soit P le polynôme d'interpolation de Lagrange qui passe par n points donnés. Donner le degré de P en fonction de n. Quel est le polynôme qui passe par les points $(-1, 0)$ et $(0, 1)$?
- Soit $\dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. À quelle condition peut-on dire que cette fraction est irréductible ? Comment faire pour s'y ramener ?
- Quelle est la définition d'un pôle d'une fraction rationnelle $\dfrac{A}{B}$?